Les résultats établis ci-dessous sont valables aussi bien en géométrie plane qu'en géométrie dans l'espace. Aussi, nous ne préciserons pas si les points considérés appartiennent au plan ou à l'espace (sauf lorsque nous passerons aux coordonnées).

1. Barycentre de *n* points pondérés

1.1. Théorème *Existence et unicité du barycentre*

Soit $\left(A_i, \alpha_i\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ un système de points pondérés de masse totale $m = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$.

Si $m \neq 0$ alors il existe un unique point G tel que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$

Démonstration :

D'après la relation de Chasles : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{A_1A_i} \right)$

Changeons l'ordre des termes : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{A_1A_i} \right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_1} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{A_1A_i}$

Le lecteur peu habitué à manipuler le symbole de sommation Σ pourra, en première lecture, retranscrire cette démonstration en explicitant chaque somme.

Posons $\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{A_1A_i}$ et factorisons $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_1}$ par $\overrightarrow{GA_1}$ (qui est indépendant de l'indice *i*) :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_1} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{A_1A_i} = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \right) \overrightarrow{GA_1} + \vec{u}$$

D'où finalement, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = m \overrightarrow{GA_1} + \vec{u}$

Nous avons donc l'équivalence des deux conditions suivantes :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{A_1G} = \frac{\vec{u}}{m} \quad \text{(puisque } m \neq 0\text{)}$$

Posons $\vec{v} = \frac{\vec{u}}{m}$; ainsi : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{A_1G} = \vec{v}$

Or, nous savons qu'étant donné un point A_1 et un vecteur $\vec{v}$, il existe un unique point G tel que $\overrightarrow{A_1G} = \vec{v}$.

Donc il existe un unique point G tel que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$.

1.2. Définition *Barycentre*

Le point G tel que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$ (avec $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$) s'appelle le barycentre du système $\left(A_i, \alpha_i\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

Notations commodes : $G = \text{bar}\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline A_1 & A_2 & \ldots & A_n \\ \hline \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \hline \end{array}$ ou $G = \text{bar}\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \ldots, (A_n, \alpha_n)\}$

Cas particulier : lorsque $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n$, le point G est appelé isobarycentre (ou centre de gravité) du système $\left(A_i, \alpha_i\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

1.3. Réduction de la somme $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$

Cette somme est appelée "fonction vectorielle de Leibniz".

Soit M un point quelconque (du plan ou de l'espace)

1er cas : $m \neq 0$: soit G le barycentre du système $\left(A_i, \alpha_i\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. ($G$ existe car $m \neq 0$)

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA_i}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \overrightarrow{MG} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \overrightarrow{MG} \text{ car } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$$

Bilan : $\boxed{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = m \overrightarrow{MG}}$

2ème cas : $m = 0$: dans ce cas le barycentre G n'existe pas. Cependant, on a, pour tout point N :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NA_i}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \overrightarrow{MN} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{NA_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{NA_i} \text{ puisque } \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) = 0$$

Bilan : $\boxed{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} \text{ est constant (c'est-à-dire indépendant de } M)}$

Les résultats précédents sont remarquables dans le sens où ils permettent de réduire une somme de n vecteurs à *un seul* vecteur, ce qui facilite, par exemple, la recherche de lieux géométriques comme l'illustre l'exercice suivant.

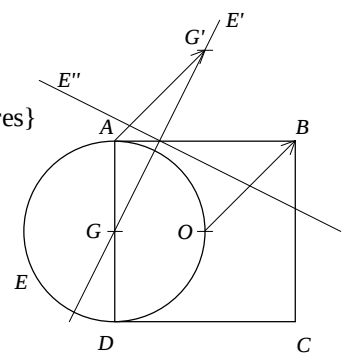
Exercice (Type BAC)

ABCD est un carré. Déterminer les lieux géométriques suivants :

1) $E = \{M \text{ tels que } \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{AB}\|\}$

2) $E' = \{M \text{ tels que } 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \text{ et } \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \text{ soient colinéaires}\}$

3) $E'' = \{M \text{ tels que } \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|\}$



Solution :

1) On a : $2\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC} = 2\vec{MG}$ où $G = \text{bar}\{(A, 2), (B, -1), (C, 1)\}$

Déterminons ce point G : $2\vec{GA} - \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$

$$2\vec{GA} = \vec{AB} - \vec{AC}$$

$$\vec{AG} = \frac{1}{2}(\vec{AC} - \vec{AB}) = \frac{1}{2}\vec{BC}$$

Le point G est donc le milieu du segment $[AD]$.

Déterminons l'ensemble E. On a les équivalences suivantes :

$$\|2\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{AB}\| \Leftrightarrow \|2\vec{MG}\| = \|\vec{AB}\| \Leftrightarrow MG = \frac{1}{2}AB$$

Conclusion : E est le cercle de centre G (milieu de $[AD]$) et de diamètre $AB = AD$

2) Nous avons : $\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{MC} = 2\vec{MG'}$ où $G' = \text{bar}\{(A, 1), (B, 2), (C, -1)\}$

Déterminons ce point G' : $\vec{G'A} + 2\vec{G'B} - \vec{G'C} = \vec{0}$

$$2\vec{G'A} = \vec{AC} - 2\vec{AB}$$

$$\vec{AG'} = \vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AC} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{CA}$$

Notons O le centre de $ABCD$.

On a ainsi : $\vec{AG'} = \vec{AB} + \vec{OA} = \vec{OB}$

Déterminons l'ensemble E'. On a les équivalences suivantes :

$2\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}$ et $\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{MC}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ $2\vec{MG}$ et $2\vec{MG'}$ colinéaires $\Leftrightarrow M \in (GG')$

Conclusion : E' est la droite (GG')

3) On a les équivalences suivantes :

$$\|2\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{MC}\| \Leftrightarrow 2MG = 2MG' \Leftrightarrow MG = MG'$$

E'' est donc la médiatrice du segment $[GG']$.

1.4. Propriétés du barycentre

a) Homogénéité

Le barycentre reste inchangé si l'on remplace les coefficients par des coefficients proportionnels non nuls.

Démonstration : Si $k \neq 0$, on a les équivalences suivantes :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{GA_i} = \vec{0} \Leftrightarrow k\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{GA_i} = \vec{0} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} k\alpha_i \vec{GA_i} = \vec{0}$$

b) Associativité

On ne change pas le barycentre de plusieurs points en remplaçant certains d'entre eux par leur barycentre affecté de la somme (non nulle) des coefficients correspondants.

Exemple : $G = \text{bar}\{ (A , 1), (B, 2), (C, 3) \} = \text{bar}\{ (G', 3), (C, 3) \}$ où $G' = \text{bar}\{ (A, 1), (B, 2) \}$

Et finalement, on s'aperçoit que G est le milieu de $[G'C]$.

Démonstration :

Soient $G = \text{bar}\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ \hline \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \hline \end{array}$ et $G' = \text{bar}\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline A_1 & A_2 & \dots & A_p \\ \hline \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_p \\ \hline \end{array}$ (où $p < n$).

Notons $m = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ et $m' = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i$. On a donc, pour tout point M du plan :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = m \overrightarrow{MG} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = m' \overrightarrow{MG'}$$

Montrons que $m' \overrightarrow{GG'} + \sum_{i=p+1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$: (On en déduira que $G = \text{bar}\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline G' & A_{p+1} & \dots & A_n \\ \hline m' & \alpha_{p+1} & \dots & \alpha_n \\ \hline \end{array}$)

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} + \sum_{i=p+1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$$

$$m \overrightarrow{MG} = m' \overrightarrow{MG'} + \sum_{i=p+1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$$

Pour $M = G$, il vient : $\overrightarrow{0} = m' \overrightarrow{GG'} + \sum_{i=p+1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i}$ C.Q.F.D.

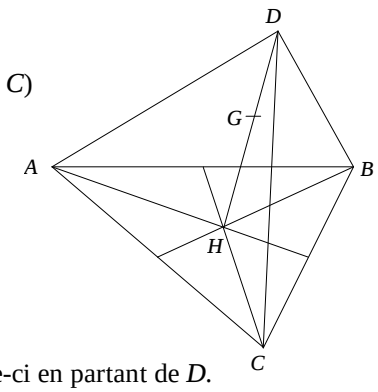
Application :

$ABCD$ est un tétraèdre et $G = \text{bar}\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline A & B & C & D \\ \hline 1 & 1 & 1 & 4 \\ \hline \end{array}$. Situer G.

Introduisons le point $H = \text{bar}\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$ (H est l'isobarycentre de A, B et C)

D'après l'associativité, on a $G = \text{bar}\begin{array}{|c|c|}\hline H & D \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array}$

Donc on a : $3 \overrightarrow{GH} + 4 \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{0}$; $7 \overrightarrow{GD} + 3 \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{0}$ d'où $\overrightarrow{DG} = \frac{3}{7} \overrightarrow{DH}$



Conclusion : G est situé sur la médiane issue de D aux 3 septièmes de celle-ci en partant de D.

Note : le résultat ci-dessus reste valable même si A, B, C et D sont quatre points quelconques du plan.

c) Coordonnées

Lorsque nous avons réduit la somme $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$ au paragraphe 1.3., nous avons obtenu :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = m \overrightarrow{MG}$$

Ce résultat étant valable pour tout point M de l'espace.

Considérons un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et plaçons M en O. La relation devient :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i} = m \overrightarrow{OG} \text{ soit } \overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}}{m} \quad (\ast)$$

Pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$, notons $(x_i ; y_i ; z_i)$ les coordonnées du point A_i.

Notons également $(x_G ; y_G ; z_G)$ les coordonnées de G.

La relation $(\ast)$ est interprétable en termes de coordonnées : $\begin{cases} x_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i}{m} \\ y_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i}{m} \\ z_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i}{m} \end{cases}$

La troisième coordonnée étant nulle (ou absente) si l'on travaille dans le plan (xOy).

Retenons ce fait :

les coordonnées du barycentre G sont les moyennes pondérées des coordonnées des points du système.

d) Affixe du barycentre (dans le plan complexe $\mathbb{C}$)

Notons z_G l'affixe de G et, pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$, z_i l'affixe du point A_i.

En interprétant la relation $(\ast)$ en termes d'affixes, on obtient : $z_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i}{m}$.

L'affixe du barycentre G est la moyenne pondérée des affixes des points du système.

2. Lien entre le barycentre et les droites, les segments et les plans

Rappelons un théorème fondamental :

2.1. Théorème

Soient A et B deux points distincts. On considère le système $\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$ avec $\alpha + \beta \neq 0$.

1. Le barycentre G de $\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$ est situé sur la droite (AB)
2. La droite (AB) est l'ensemble des barycentres du système $\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$

Démonstration :

1. Soit $G = \text{bar}\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$. On vérifie que G est situé sur (AB) :

   Par définition, on a : $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$

   D'où : $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{AB}$

   Les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, donc G est situé sur la droite (AB).

2. Soit M un point quelconque de la droite (AB). Montrons que M est un certain barycentre de A et B.

   Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, donc il existe un réel λ tel que : $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}$, d'où :

   $$(1 - \lambda) \overrightarrow{AM} + \lambda \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{0}$$

   Conclusion : $M = \text{bar}\{(A, 1 - \lambda), (B, \lambda)\}$. (Car $1 - \lambda + \lambda \neq 0$)

Ce théorème s'étend, dans l'espace, à trois points non alignés :

2.2. Théorème

Soient A, B et C trois points non alignés (et a fortiori distincts deux à deux).

On considère le système $\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$ avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.

1. Le barycentre G de $\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma\}$ est situé dans le plan (ABC)
2. Le plan (ABC) est l'ensemble des barycentres du système $\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$

Démonstration :

1. Soit $G = \text{bar}\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$. On vérifie que G est situé dans (ABC) :

   D'après 1.3. : $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} = m \overrightarrow{MG}$ (où $m = \alpha + \beta + \gamma$)

   En choisissant M en A, on a : $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\beta}{m} \overrightarrow{AB} + \dfrac{\gamma}{m} \overrightarrow{AC}$ $(m \neq 0)$

   Les vecteurs $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires, donc G est dans le plan $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ c'est-à-dire (ABC).

2. Soit M un point quelconque du plan (ABC). Montrons que M est un certain barycentre de A, B et C.

   Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires, donc il existe deux réels λ et μ tels que :

   $$\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$$

   D'où : $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AM} + \lambda \overrightarrow{MB} + \mu \overrightarrow{AM} + \mu \overrightarrow{MC}$

$$(1-\lambda-\mu)\,\vec{AM}+\lambda\,\vec{BM}+\mu\,\vec{CM}=\vec{0}$$

Conclusion : $M = \text{bar}\{(A, 1-\lambda-\mu), (B, \lambda), (C, \mu)\}$

(car $1-\lambda-\mu+\lambda+\mu=1$ et $1\neq 0$)

Et pour terminer, donnons le théorème suivant :

2.3. Théorème

Soient A et B deux points distincts. On considère le système $\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$ avec $\alpha+\beta\neq 0$.

Si α et β ont le même signe, alors :

1. Le barycentre G de $\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$ est situé sur le segment $[AB]$.
2. Le segment $[AB]$ est l'ensemble des barycentres du système $\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$

Démonstration :

Supposons que $\alpha\neq 0$. Les relations suivantes sont équivalentes :

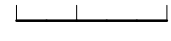
Si $\alpha = 0$ alors $G = B$, donc $G \in [AB]$.

G est le barycentre de (A, α) et (B, β)

Par homogénéité : G est le barycentre de $(A, 1)$ et $(B, \frac{\beta}{\alpha})$

$$\vec{AG}+\frac{\beta}{\alpha}\vec{BG}=\vec{0}$$

$$\vec{AG}=\frac{\beta}{\alpha}\vec{GB}$$



Si α et β sont du même signe, alors $\frac{\beta}{\alpha}>0$, donc $\vec{AG}$ et $\vec{GB}$ sont de même sens : $G\in[AB]$.

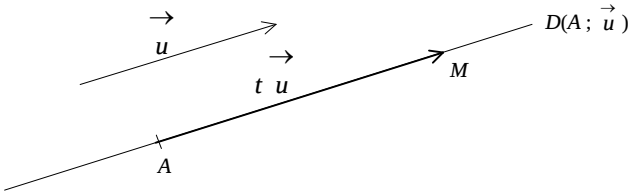
Si α et β sont de signes opposés, alors $\frac{\beta}{\alpha}<0$, donc $\vec{AG}$ et $\vec{GB}$ sont de sens opposés : $G\notin[AB]$.

3. Représentation paramétrique d'une droite (ainsi que d'une demi-droite ou d'un segment)

3.1. Rappel

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et A un point. L'ensemble des points M tels que $\vec{AM}=t\,\vec{u}$ ($t\in\mathbb{R}$) est une droite.

C'est la droite passant par A et dirigée par $\vec{u}$. (On la note parfois $D(A\,;\,\vec{u})$)



Il est important de noter que lorsque le paramètre t décrit $\mathbb{R}$, le point M décrit la droite $D(A\,;\,\vec{u})$.

Notons $(x_0; y_0 ; z_0)$ les coordonnées de A, $\begin{vmatrix}a\\b\\c\end{vmatrix}$ celles de $\vec{u}$ et $(x\,;\,y\,;\,z)$ celles de M.

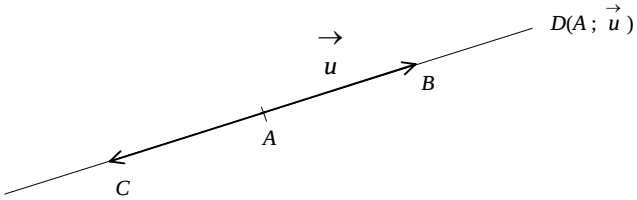
La relation $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$ s'écrit alors : $\begin{cases} x - x_0 = at \\ y - y_0 = bt \\ z - z_0 = ct \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases}$.

Ce dernier système s'appelle représentation paramétrique de la droite $D(A\ ;\ \vec{u}\ )$.

Exemple :

La droite dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t + 2 \\ z = -1 \end{cases}$ est la droite passant par le point $A(1\ ;\ 2\ -1)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}$.

3.2. Cas des demi-droites et des segments :



On se donne une droite $D(A\ ;\ \vec{u}\ )$.

Soient B le point tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et C le point tel que $\overrightarrow{AC} = -\vec{u}$.

Pour caractériser la demi-droite $[AB)$, on limite les valeurs du paramètre t à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

Pour caractériser la demi-droite $[AC)$, on limite les valeurs du paramètre t à l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0[$.

Pour caractériser le segment $[AB]$, on limite les valeurs du paramètre t à l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.

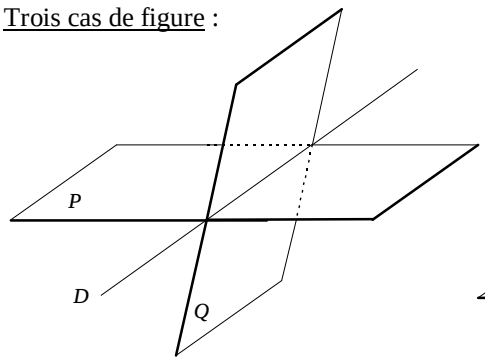
3.3. Cas d'une droite définie par l'intersection de deux plans (ou par un système de deux équations linéaires)

On considère deux plans sécants P et Q d'équations cartésiennes respectives :

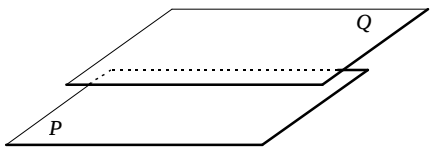
$$ax + by + cz + d = 0$$

$$a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

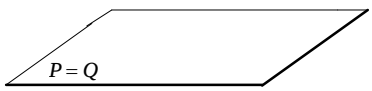
Trois cas de figure :



P et Q sont sécants suivant la droite D



P et Q sont strictement parallèles



P et Q sont confondus

P et Q sont parallèles

Lorsque les deux plans sont sécants, on peut alors récupérer le système de représentation paramétrique de la droite d'intersection en utilisant une des trois coordonnées comme paramètre et en résolvant le système.

Exemple

On donne les équations cartésiennes de deux plans :

$$P : x - 4y + 7 = 0$$

$$Q : x + 2y - z + 1 = 0$$

1. Montrer que ces plans sont sécants. On note d leur droite d'intersection.
2. Déterminer un vecteur directeur de d.

Un vecteur normal à P est $\vec{n}$ (1 ; –4 ; 0). Un vecteur normal $\vec{n'}$ à Q est $\vec{n'}$ (1 ; 2 ; –1). Étudions la colinéarité de ces deux vecteurs : existe-t-il un réel k tel que $\vec{n'} = k\ \vec{n}$? La réponse est clairement non. (Il faudrait que k soit solution des trois équations $1 = k \times 1$; $2 = k \times (-4)$ et $-1 = k \times 0$ ...)

Les plans P et Q sont donc sécants.

Un point $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ appartient à la droite d si et seulement si ses coordonnées sont solutions du système :

$$\begin{cases} x - 4y + 7 = 0 \\ x + 2y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

Posons $y = t$, il vient alors $x = 4t - 7$ et $z = 4t - 7 + 2t + 1 = 6t - 6$.

D'où une représentation paramétrique de d :

$$\begin{cases} x = 4t - 7 \\ y = t \\ z = 6t - 6 \end{cases}$$

Soit A le point de coordonnées (–7 ; 0 ; –6) et $\vec{u}$ le vecteur de coordonnées (4 ; 1 ; 6) .

Le point A est un point de le droite d (obtenu lorsque $t = 0$)

Le système ci-dessus s'écrit encore :

$$\vec{AM} = t\,\vec{u}$$

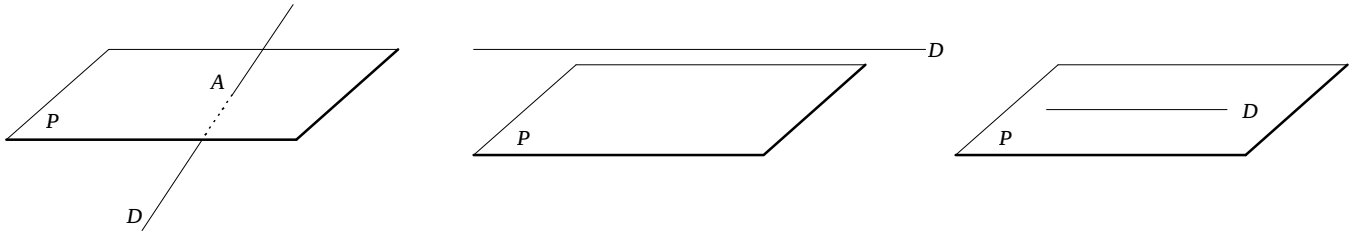
Un vecteur directeur de d est donc $\vec{u}$ (4 ; 1 ; 6)

3.4. Intersection d'une droite et d'un plan

On se donne ici un plan P d'équation : $ax + by + cz + d = 0$

Et une droite D représentée par : $\begin{cases} x = \alpha t + x_0 \\ y = \beta t + y_0 \\ z = \gamma t + z_0 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$

Trois cas de figure :



D et *P* sont sécants en *A*

D est strictement parallèle à *P*

D est incluse dans *P*

D et *P* sont parallèles

On suppose que le vecteur normal $\vec{n}$ (a ; b ; c) au plan *P* et le vecteur directeur $\vec{u}$ (α ; β ; γ) de la droite *D* sont non orthogonaux, ainsi *P* et *D* sont sécants en un point *A*.

On recherche les coordonnées de *A* en résolvant l'équation suivante, d'inconnue t :

$$a(\alpha t + x_0) + b(\beta t + y_0) + c(\gamma t + z_0) + d = 0$$

$$(a\alpha + b\beta + c\gamma)t + ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$$

Comme a supposé $\vec{n}$ et $\vec{u}$ non orthogonaux, on a $a\alpha + b\beta + c\gamma \neq 0$ et l'équation admet bien unique solution :

$$t = -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a\alpha + b\beta + c\gamma}$$

En remplaçant dans le système de représentation paramétrique de *D*, on trouve les coordonnées de *A*.

Exemple :

On donne : $P : 2x - z = 0$

$$D : \begin{cases} x = t - 1 \\ y = -3t \\ z = 2 \end{cases}$$

Le vecteur normal $\vec{n}$ (2 ; 0 ; –1) au plan *P* et le vecteur directeur $\vec{u}$ (1 ; –3 ; 0) de la droite *D* sont bien non orthogonaux car $\vec{n} \cdot \vec{u} = 2 \times 1 + 0 \times (-3) + (-1) \times 0 = 2$, ce qui est non nul. On résout :

$$2(t - 1) - 2 = 0$$

$$t = 2$$

D'où les coordonnées du point d'intersection *A* : $A(1 ; -6 ; 2)$

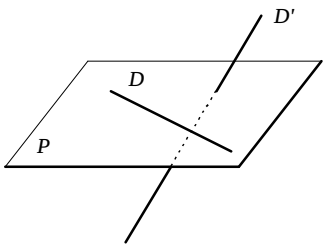
3.5. Intersection (éventuelle) de deux droites de l'espace

On donne deux droites *D* et *D'* de l'espace représentée paramétriquement par :

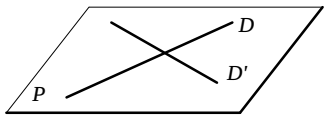
$$D : \begin{cases} x = at + x_1 \\ y = bt + y_1 \\ z = ct + z_1 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad D' : \begin{cases} x = \alpha t' + x_2 \\ y = \beta t' + y_2 \\ z = \gamma t' + z_2 \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$$

Un bon réflexe : ne pas utiliser le même paramètre *t* pour les deux droites !

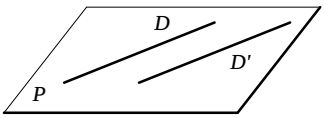
Quatre cas de figure :



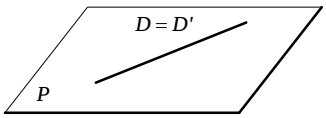
D et *D'* sont non coplanaires



D et *D'* sont sécantes



D et *D'* sont strictement parallèles



D et *D'* sont confondues

D et *D'* sont coplanaires

L'étude de l'intersection des droites se fait en étudiant le système (d'inconnues t et t') suivant :

$$\begin{cases} at + x_1 = \alpha t' + x_2 \\ bt + y_1 = \beta t' + y_2 \\ ct + z_1 = \gamma t' + z_2 \end{cases}$$

Exemple :

On donne $A(1 ; -1 ; 0)$, $B(0 ; -1 ; 1)$, $C(3 ; -2 ; 0)$ et $D(2 ; -3 ; 3)$

Étudier l'intersection des droites (AB) et (CD).

La droite (AB) est représentée paramétriquement par :

$$\begin{cases} x = -t + 1 \\ y = -1 \\ z = t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

La droite (CD) est représentée paramétriquement par :

$$\begin{cases} x = -t' + 3 \\ y = -t' - 2 \\ z = 3t' \end{cases}, \ t' \in \mathbb{R}$$

On résout le système : $\begin{cases} -t + 1 = -t' + 3 \\ -1 = -t' - 2 \\ t = 3t' \end{cases}$

La deuxième équation donne $t' = -1$, puis la troisième donne $t = -3$.

Ces deux valeurs sont compatibles avec la première équation.

Nous pouvons donc affirmer deux choses :

1) Le système a une solution, donc les droites ont une intersection non vide, elles sont coplanaires.

2) Le système admet une unique solution qui est le couple $(t, t') = (-3, -1)$ donc les droites sont sécantes en un point A.

En remplaçant, on trouve les coordonnées du point A :

$$A(4 ; -1 ; -3)$$

Dans les différentes configurations ci-dessus, nous avons étés confrontés à des systèmes linéaires.

Consacrons un paragraphe à ceux-ci.

4. Systèmes linéaires

4.1. Définition générales

4.1.1. Définition

Soient n et p deux entiers naturels non nuls.

On appelle système d'équations linéaires de n équations à p inconnues x_1, x_2, ... , x_p le système :

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$ où a_{ij} et b_i sont des réels pour tous $i = 1, \ldots, n$ et $j = 1, \ldots, p$.

Vocabulaire :

- lorsque $n = p$, le système (S) est dit "carré"
- une solution de (S) est un p-uplet (x_1, x_2, ... , x_p) vérifiant les n équations de (S). Résoudre un système, c'est trouver tous les p-uplets solutions.
- lorsque tous les coefficients situés sous la diagonale $\begin{matrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & a_{33} & \\ & & & \ddots \end{matrix}$ sont nuls, le système est dit "triangulaires supérieur".

4.1.2. Définition :

Deux systèmes d'équations linéaires (S) et (S') sont dits équivalents lorsqu'ils ont le même ensemble de solutions.

Notons ici, que la résolution d'un système par la méthode des combinaisons linéaires (employée depuis le collège) est, certes parfois rapide, mais ne fonctionnant pas systématiquement par équivalence. C'est pourquoi il est indispensable, lorsqu'on utilise cette méthode de vérifier les solutions.

Exemple où l'on transforme un système en un système non équivalent :

On considère le système suivant : $$(S)\begin{cases} x - y = 0 & L_1 \\ y - z = 1 & L_2 \\ z - x = 0 & L_3 \end{cases}$$

Formons un nouveau système (S') avec les combinaisons suivantes :

$L_1 \leftarrow L_1 + L_2$; $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$:

$$(S')\begin{cases} x - z = 1 \\ z - y = 0 \\ x + y - 2z = 1 \end{cases}$$

Le problème ci-contre, provient du fait que l'on effectue trois opérations simultanément sur le système.

On remarque alors que le triplet (1 ; 0 ; 0) est solution de (S') mais pas de (S). Ces systèmes ne sont donc pas équivalents.

4.2. Opérations élémentaires sur les lignes

Notons L_1, L_2, ... , L_n les n lignes d'un système (S).

4.2.1. Définition

On appelle opérations élémentaires sur les lignes les opérations suivantes :

1. Échange de deux lignes : $L_i \leftrightarrow L_j$
2. Multiplication d'une ligne par un réel $\alpha \neq 0$: $L_i \leftarrow \alpha L_i$
3. Addition à une ligne d'un multiple d'une autre ligne : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ ($\lambda \in \mathbb{R}$)

Les autres lignes non concernées doivent être réécrites dans le système sans modification.

4.2.2. Théorème

Soit (S) un système d'équations linéaires.

Le système (S') obtenu en effectuant des opérations élémentaires sur (S) est équivalent à (S).

Démonstration :

- Opération $L_i \leftrightarrow L_j$: évident
- Opération $L_i \leftarrow \alpha L_i$: soit (S') le système obtenu en multipliant L_i par $\alpha \neq 0$.

  Soit $(s_1, \dots, s_p)$ un p-uplet solution de (S) (s'il y en a).

  On a donc, en particulier : $a_{i1}s_1 + a_{i2}s_2 + \dots + a_{ip}s_p = b_i \quad (L_i)$

  Et en multipliant par α : $(\alpha a_{i1})s_1 + (\alpha a_{i2})s_2 + \dots + (\alpha a_{ip})s_p = \alpha b_i$

  Donc $(s_1, \dots, s_p)$ est solution de (S').

  Réciproquement, si $(s_1, \dots, s_p)$ est solution de (S'), on a en particulier :

  $$(\alpha a_{i1})s_1 + (\alpha a_{i2})s_2 + \dots + (\alpha a_{ip})s_p = \alpha b_i$$

  Et puisque $\alpha \neq 0$: $a_{i1}s_1 + a_{i2}s_2 + \dots + a_{ip}s_p = b_i$

  Donc $(s_1, \dots, s_p)$ est solution de (S).
- Opération $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$: soit (S') le système obtenu en ajoutant λL_j à L_i.

  Soit $(s_1, \dots, s_p)$ un p-uplet solution de (S) (s'il y en a).

  On a donc, en particulier : $\begin{cases} a_{i1}s_1 + a_{i2}s_2 + \dots + a_{ip}s_p = b_i & (L_i) \\ a_{j1}s_1 + a_{j2}s_2 + \dots + a_{jp}s_p = b_j & (L_j) \end{cases}$

  Et en formant $L_i + \lambda L_j$: $(a_{i1} + \lambda a_{j1})s_1 + (a_{i2} + \lambda a_{j2})s_2 + \dots + (a_{ip} + \lambda a_{jp})s_p = b_i + \lambda b_j$

  Donc $(s_1, \dots, s_p)$ est solution de (S').

  Réciproquement, si $(s_1, \dots, s_p)$ est solution de (S'), on a en particulier :

  $$(a_{i1} + \lambda a_{j1})s_1 + (a_{i2} + \lambda a_{j2})s_2 + \dots + (a_{ip} + \lambda a_{jp})s_p = b_i + \lambda b_j$$

  $$(a_{i1}s_1 + a_{i2}s_2 + \dots + a_{ip}s_p) + \lambda(\underbrace{a_{j1}s_1 + a_{j2}s_2 + \dots + a_{jp}s_p}_{b_j}) = b_i + \lambda b_j$$

  $$a_{i1}s_1 + a_{i2}s_2 + \dots + a_{ip}s_p = b_i$$

  Donc $(s_1, \dots, s_p)$ est solution de (S).

Exemple : reprenons le système précédent qui avait été traîté par une méthode incorrecte :

On considère le système : $(S)\begin{cases} x-y=0 & L_1 \\ y-z=1 & L_2 \\ -x+z=0 & L_3 \end{cases}$

Effectuons l'opération élémentaire : $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$

On obtient un nouveau système (S') équivalent :

$$(S')\begin{cases} x-y=0 \\ y-z=1 \\ -y+z=0 \end{cases}$$

En observant les deux dernières lignes de ce système, on constate qu'il n'existe pas de réels y et z qui vérifient les conditions $y - z = 1$ **et** $-y + z = 0$. Il n'y a donc pas de solution au système (S'), ni au système (S).

4.3. Méthode du pivot de Gauss

Elle a pour but de transformer un système (S) en un système (S') équivalent (en utilisant les opérations élémentaires sur les lignes) et **triangulaire supérieur**.

Dans ce qui suit, on considère le système $(S)\begin{cases} 2x-y+z=7 & L_1 \\ x+2y-z=6 & L_2 \\ -x+y+2z=11 & L_3 \end{cases}$

EXPOSÉ DE LA MÉTHODE	EXEMPLE DE MISE EN ŒUVRE
1. On place en L_1 une ligne dont le coefficient est non nul. (Ce coefficient est appelé "le pivot"). Conseil : choisir, si possible un pivot égal à ± 1.	$L_1 \leftrightarrow L_2$ $\begin{cases} \boxed{1}x+2y-z=6 & L_1 \\ 2x-y+z=7 & L_2 \\ -x+y+2z=11 & L_3 \end{cases}$
2. On élimine la première inconnue dans L_2, L_3, ... , L_n par l'opération élémentaire : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_1$ $(\lambda = -\frac{a_{i1}}{a_{11}})$	$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$; $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ $\begin{cases} x+2y-z=6 & L_1 \\ 0\boxed{-5}y+3z=-5 & L_2 \\ 0+3y+z=17 & L_3 \end{cases}$
3. On choisit parmi L_2, ... L_n une ligne ou le coefficient de l'inconnue suivante est non nul et l'on utilise ce coefficient comme nouveau pivot.	$L_3 \leftarrow L_3 + \frac{3}{5}L_2$
4. On recommence l'étape 2 à la ligne adéquate jusqu'à obtenir un système triangulaire supérieur.	$\begin{cases} x+2y-z=6 & L_1 \\ -5y+3z=-5 & L_2 \\ \frac{14}{5}z=14 & L_3 \end{cases}$
Les solutions du systèmes s'obtiennent par résolution d'équations de proche en proche.	$z=5$; $y=4$; $x=3$

Notre système (S) admet un unique triplet solution : $S = \{(3 ; 4 ; 5)\}$

Note : on peut être amenés à permuter des colonnes (ou des inconnues) afin de se ramener à des pivots plus simples.

Exercices : résoudre les systèmes suivants :

$\begin{cases} x+2y+3z=14 \\ 4x+5y+6z=32 \\ 7x+8y+10z=53 \end{cases}$ (Réponse : $S = \{(1\ ;\ 2\ ;\ 3)\}$)

$\begin{cases} x+y+z+t=4 \\ 2x-y+z+2t=4 \\ 3x-2y+5z-2t=4 \\ x+y+2z=4 \end{cases}$ (Réponse : $S = \{(1\ ;\ 1\ ;\ 1\ ;\ 1\})$

4.4. Nombre de solution d'un système d'équations linéaires

4.4.1. Théorème :

Un système (S) d'équations linéaires admet soit aucune solution, soit une unique solution, soit une infinité de solutions.

Vocabulaire : un système (S) admettant une unique solution est dit de "Cramer"

Exemple :

Résoudre : $\begin{cases} x+y=1 & L_1 \\ 2x+ay=b & L_2 \end{cases}$

Effectuons $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$. On obtient : $\begin{cases} x+y=1 & L_1 \\ (a-2)y=b-2 & L_2 \end{cases}$

1. Si $a \neq 2$, alors y se détermine de manière unique :

$$y = \frac{b-2}{a-2}$$

D'où : $$x = 1 - y = \frac{a-b}{a-2}$$

Le système admet alors un unique couple solution :

$$S = \left\{\left(\frac{a-b}{a-2}\ ;\ \frac{b-2}{a-2}\right)\right\}$$

2. Si $a = 2$, alors on a : $0 \times y = b - 2$

Distinguons deux sous-cas :

a) Si $b \neq 2$, alors l'égalité $0 \times y = b - 2$ est impossible. Le système n'a pas de solutions.

b) Si $b = 2$, alors l'égalité $0 \times y = b - 2$ est réalisée quelque soit la valeur de y.

Le système admet alors une infinité de solutions :

$$S = \{(1 - y\ ;\ y) \text{ où } y \in \mathbb{R}\}$$

Démonstration du théorème 4.4.1. :

Notons $(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$ où a_{ij} et b_i sont des réels pour tous $i = 1, \ldots, n$ et $j = 1, \ldots, p$.

Nous avons déjà vu dans les exemples, qu'il existe des systèmes sans solution, d'autres avec une unique solution et d'autres avec une infinité de solutions. Il s'agit de montrer qu'il n'y a pas d'autres cas possibles.

Nous allons donc montrer que si le système (S) admet deux solutions distinctes alors il en admet une infinité.

Soient $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ et $(y_1, y_2, \ldots, y_p)$ deux p-uplets distincts solutions de de (S)

On a donc : $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$ et $\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1p}y_p = b_1 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2p}y_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{np}y_p = b_n \end{cases}$

Par soustraction, on se ramène à un système homogène :

Considérons les p-uplets $(z_1, z_2, \ldots, z_p)$ définis par : $z_k = tx_k + (1 - t)y_k$ $(1 \leqslant k \leqslant p)$ pour tout $t \in]0 ; 1[$.

(Remarquons que comme les les p-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ et $(y_1, y_2, \ldots, y_p)$ sont distincts, il existe au moins un indice k tel que $x_k \neq y_k$. Le réel z_k défini par $z_k = tx_k + (1 - t)y_k$ est alors bien distinct de x_k et y_k quelque soit $t \in]0 ; 1[$. En effet $z_k = x_k$ entraîne $(1 - t)x_k = (1 - t)y_k$ d'où, (comme $t \neq 1$), $x_k = y_k$ ce qui est contradictoire. De même, $z_k = y_k$ entraîne $tx_k = ty_k$ d'où, (comme $t \neq 0$), $x_k = y_k$ ce qui est aussi contradictoire.)

On a donc bien construit une infinité de p-uplets $(z_1, z_2, \ldots, z_p)$ distincts de $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ et $(y_1, y_2, \ldots, y_p)$.

Montrons maintenant que tous ces p-uplets $(z_1, z_2, \ldots, z_p)$ sont solutions de (S) :

On a : $\begin{cases} a_{11}z_1 + a_{12}z_2 + \ldots + a_{1p}z_p = a_{11}(tx_1 + (1-t)y_1) + a_{12}(tx_2 + (1-t)y_2) + \ldots + a_{1p}(tx_p + (1-t)y_p) \\ a_{21}z_1 + a_{22}z_2 + \ldots + a_{2p}z_p = a_{21}(tx_1 + (1-t)y_1) + a_{22}(tx_2 + (1-t)y_2) + \ldots + a_{2p}(tx_p + (1-t)y_p) \\ \vdots \\ a_{n1}z_1 + a_{n2}z_2 + \ldots + a_{np}z_p = a_{n1}(tx_1 + (1-t)y_1) + a_{n2}(tx_2 + (1-t)y_2) + \ldots + a_{np}(tx_p + (1-t)y_p) \end{cases}$

$$\begin{cases} a_{11}z_1 + a_{12}z_2 + \ldots + a_{1p}z_p = t(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p) + (1-t)(a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1p}y_p) = tb_1 + (1-t)b_1 = b_1 \\ a_{21}z_1 + a_{22}z_2 + \ldots + a_{2p}z_p = t(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p) + (1-t)(a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2p}y_p) = tb_2 + (1-t)b_2 = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}z_1 + a_{n2}z_2 + \ldots + a_{np}z_p = t(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p) + (1-t)(a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{np}y_p) = tb_n + (1-t)b_n = b_n \end{cases}$$

Donc les p-uplets $(z_1, z_2, \ldots, z_p)$ sont bien solutions de (S).

Le système (S) admet alors une infinité de solutions.

D'où le théorème 4.4.1.

Interprétation graphique du théorème 4.4.1. pour les systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues :

Dans ce cas, chaque équation correspond à une équation de droite dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Résoudre le système revient à trouver les coordonnées des points d'intersection de ces deux droites. Or, deux droites du plan sont soit sécantes (unique solution) soit parallèles (infinité de solutions si les droites sont confondues, aucune solution si les droites sont strictement parallèles).

Condition pour qu'un système de deux équations linéaires à deux inconnues soit de "Cramer" :

Considérons le système : $(S)\begin{cases} ax+by=c & D_1 \\ a'x+b'y=c' & D_2 \end{cases}$

Un vecteur directeur de la droite D_1 est : $\vec{u}\ (-b\ ;\ a)$

Un vecteur directeur de la droite D_2 est : $\vec{v}\ (-b'\ ;\ a')$

Les deux droites D_1 et D_2 sont sécantes si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires.

On peut donc énoncer :

Le système (*S*) est de "Cramer" si et seulement si $ab' - a'b \neq 0$

La quantité $ab' - a'b$ s'appelle le déterminant du système.

Remarque : Le théorème 4.4.1. est faux si l'on considère des systèmes d'équations non linéaires !

Considérons, par exemple, le système (*S*) suivant :

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2-y^2=3 \end{cases}$$

En posant $X = x^2$ et $Y = y^2$, on se ramène immédiatement à un système linéaire (d'inconnues *X* et *Y*) ayant un unique couple solution $(X\ ;\ Y) = (4\ ;\ 1)$.

En résolvant maintenant chacune des petites équations $x^2 = 4$, et $y^2 = 1$, il apparaît que le système proposé admet quatre couples solutions :

$$S = \{(-2\ ;\ -1)\ ;\ (-2\ ;\ 1)\ ;\ (2\ ;\ -1)\ ;\ (2\ ;\ 1)\}$$

Autre exemple de système non linéaire (à résoudre par substitution)

$$\begin{cases} 2x+y^2=0 \\ 2(x+1)y=0 \end{cases}$$

On trouve trois solutions : $S = \{(0\ ;\ 0)\ ;\ (-1;\sqrt{2}\ )\ ;\ (-1\ ;\ -\sqrt{2}\ )\}$

Interprétation graphique du théorème 4.4.1. pour les systèmes de trois équations linéaires à trois inconnues :

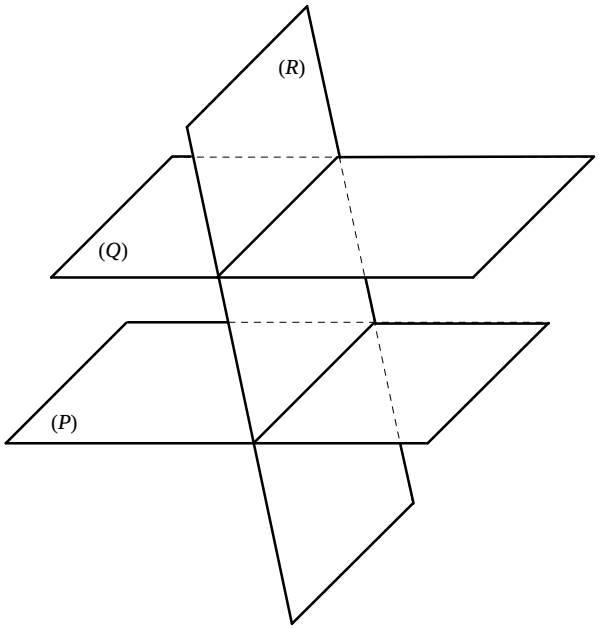
On considère le système $(S) : \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$

On peut distinguer les situations suivantes :

1. Le système n'a pas de solutions. Géométriquement, c'est qu'on a affaire à trois plans strictement parallèles ou aux situations A ou D ci-dessous.
2. Le système admet un unique triplet solution. Géométriquement, on a affaire à la situation B ci-dessous.
3. Le système admet une infinité de solutions, c'est que l'on a deux, voire trois plans confondus ou la situation C ci-dessous.

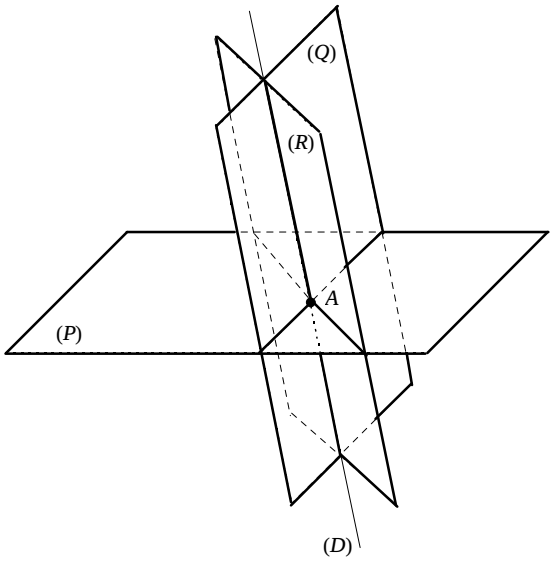
SITUATION A

Plan (R) sécant à deux plans (P) et (Q) strictement parallèles



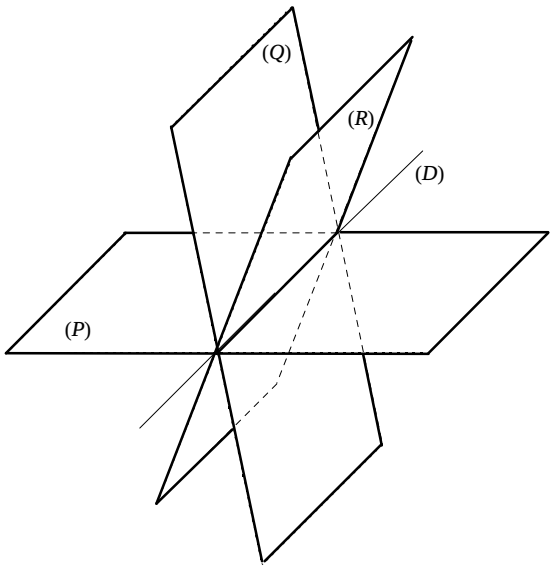
SITUATION B :

Deux plans (Q) et (R) sécants suivant une droite (D) elle-même sécante à un plan (P)



SITUATION C

Trois plans sécants suivant une même droite (D)



SITUATION D

Trois plans sécants deux à deux suivant trois droites strictement parallèles

